

# 轴对称物体 X 射线层析成像的正则化方法

魏素花 王双虎 许海波

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

**摘要** 论述了由单幅 X 射线投影进行轴对称物体密度重建的正则化方法。正则化模型的建立根据被重建物体的先验信息确定, 对这一数学模型的求解转化为解对称正定线性代数方程组的问题, 数值实现容易。仿真计算结果显示了重建方法关于密度界面位置和函数值的精度, 验证了正则化方法的抗噪性, 保证了测量数据的微小误差不会引起数值解的强烈抖动。

**关键词** 层析成像 图像重建 正则化 代数重构法 Abel 逆变换

中图法分类号: TP391.4 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)12-2275-06

## Regularization Method for Axially Symmetric Objects Tomography From a Single X-ray Projection Data

WEI Su-hua, WANG Shuang-hu, XU Hai-bo

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

**Abstract** The regularization method for density reconstruction of axially symmetric objects using a single X-ray projection is described. The regularization mathematical model is established according to a prior information of the reconstructed object. The numerical solution can be obtained by solving symmetric positive definite systems of linear equations. Numerical simulation examples illustrate the accuracy of the reconstructed density including edges and values. It has been testified that the regularization method is not sensitive to the measured data noise. This ensures that the small error of measured data will not cause strong oscillation of numerical solution.

**Keywords** tomography, image reconstruction, regularization, algebraic reconstruction technique, Abel inversion

## 1 引言

计算机层析成像技术已在许多领域得到广泛应用。利用 X 射线的投影重建被照射物体的内部结构属于 X 射线层析成像, 如医学诊断中的 CT。在核物理领域, 为了研究爆炸物体在某一时刻的物理状态, 如爆轰过程中物质密度的变化, 也使用高能 X 射线照射物体, 根据投影信息重建内部结构, 如密度分布。由于产生 X 光装置的复杂性, 使得高能 X 光照相只能形成从某点发出的

锥形光束, 不同于医学 CT 中的投影方式, 因此, 需要根据投影数据的特殊性, 建立相应的图像重建方法。

针对核物理领域应用问题的特殊背景, 研究根据一个方向 X 射线投影数据重建轴对称物体密度的数值方法。利用一个方向的投影数据进行 3 维物体的重建是信息量严重不足的, 不能准确重建内部结构。代数重建法首先由 Gordon<sup>[1]</sup> 提出, 其思想是通过迭代法求解一个线性代数方程组, 迭代的过程是使得重建的投影和测量的投影不断接近。由于投影点的个数和对物体划分

基金项目: 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目(10576013, 10576006)

收稿日期: 2006-08-14; 改回日期: 2008-04-08

第一作者简介: 魏素花(1964 ~ ), 女, 研究员。1997 年于中国科学院计算数学研究所获理学博士学位。从事图像处理及相关反问题研究。E-mail: wei\_suhua@iapcm.ac.cn

的块数决定了线性代数方程组的阶数通常很高,因此这种方法会受到求解速度的限制。代数重建法主要用于 3 维物体的重建。对于轴对称物体,当使用平行光照射时,物体各层的成像在投影平面上就是一条直线,对于每层的图像重建可以通过 Abel 变换的逆变换实现。美国洛斯阿拉莫斯国家实验室的 Asaki<sup>[2,3]</sup> 和 Hanson<sup>[4-8]</sup> 分别用变分法和贝叶斯理论研究了 Abel 逆变换的正则化方法,他们从 Abel 逆变换的表达式出发,给出了正则化求解过程。当光源近似为点光源时,照射物体的光束为锥形,对于物体的分层重建不是严格意义的 Abel 变换求逆问题。为了避免使用 Abel 逆变换带来的误差和算法的复杂,直接根据点光源的照射路径,提出了分层重建的正则化方法。其思想是将密度函数沿每一条射线的积分离散化,得到线性代数方程组,方程组的系数矩阵由物体的划分与射线穿过物体的位置决定,根据求解问题的不适定性和解的先验信息,确定正则化函数,然后求解一个多元函数的优化问题。仿真计算结果给出了轴对称物体的 2 维重建效果和算法对噪声的抑制情况,说明了这一正则化模型的有效性。

## 2 问题描述

使用高能 X 光照相,是利用 X 射线的强穿透能力,将物体投影到平面上,也就是将 3 维物体压缩成 2 维图像。X 射线经过物体后,能量被衰减,在忽略散射和物质吸收系数的假定下,接受信号强度的对数正比于物体的密度沿射线路径的积分。换句话说,在实验中,可以通过测量数据间接求得物质密度沿每一条射线的积分量,图像重建的数学问题就是根据投影平面上每一点的密度积分量恢复物体的密度分布图像。图 1 为利用高能 X 光进行密度探测的结构示意图, $o$  点为光源的位置,发出的 X 光经过物体投影到记录平面的  $P_j$  点,假设被探测物体包含在一个半径为  $R$  的球内,物体的密度分布是半径  $r$  的函数,用  $\rho(r)$  表示,物体中心到射线的距离用  $a$  表示,如图 1 所示,则积分量  $\int_a^R 2\rho(r) dl$  称为  $P_j$  点的面密度,这一物理量可以通过实验测量数据经过一定的转换关系得到,把它作为密度重建的已知量。

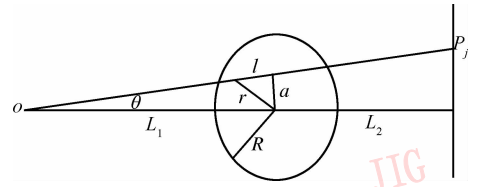


图 1 高能 X 光照相示意图

Fig. 1 High energy X-ray radiography schematic diagram

## 3 密度重建方法

利用高能 X 光照相进行密度重建问题属于反问题。反问题的特点是我们所感兴趣的信息不能直接获得,测量装置所记录的数据是这些信息的一个变换。这些测量数据通常是不完全的和带有误差的,追求对图像信息的准确和完全恢复是不可取的,通常会导致不稳定解的产生,也就是重建图像对不可避免的测量数据误差非常敏感,或者说,略有不同的数据可能恢复出差异很大的图像,因此,寻找稳定的数值求解方法是处理实验数据最关心的问题。高能 X 光照相的投影主要由 3 部分贡献组成:被探测物体的贡献、实验装置所产生散射的贡献和记录系统本底的贡献。虽然在密度反演之前,试图把散射的影响扣除,把本底的噪声通过基于偏微分方程理论的去噪方法去掉,但是由于受到我们对实验物理因素模拟准确性的影响和去噪声时的人为控制程度,使得实验数据必然是理想数据的近似。在这种意义下,重建出的图像只能是真实图像的近似,并且测量数据的精度越高,重建图像应该越逼近真实图像。数学上,这一过程是通过不适定问题的正则化处理来实现的。正则化的作用是将不适定问题转化为适定问题来求解,其思想主要是加入重建图像的先验信息,缩小求解的集合,寻找某种意义下的最优解。

假设被重建的物体密度分布具有球对称结构,用函数  $\rho(r)$  表示, $r$  为物体的半径。在每一个投影点  $P_j(j = 1, 2, \dots, m)$ ,可以计算出密度函数沿射线  $R_j(j = 1, 2, \dots, m)$  的积分值  $b_j$ ,其中射线  $R_j$  是由投影点的位置唯一确定的。因此,得到如下一组积分方程:

$$\int_{R_j} \rho(r) dl = b_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

式中的积分变量  $dl$  表示射线长度变化。对方程组

(1) 的求解,采取直接离散化的方法,假设被反演的物体包含在半径为  $R$  的球内,如图 1 所示,将半径  $R$  进行  $n$  等分,记

$$r = \frac{R}{n}, r_0 = 0, r_i = ir, \rho_i = \rho(r_i) \\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{x} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

将式(1)中的每一个积分方程离散化,可得线性代数方程组:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2)$$

式中的矩阵  $\mathbf{A}$  是由投影点数  $m$  和物体划分的块数  $n$  决定的  $m \times n$  矩阵。当物体的划分给定后,  $\mathbf{A}$  的元素可以通过计算得到,  $\mathbf{b}$  为间接测量值,两者均为已知量,  $\mathbf{x}$  是待求的密度分布。矩阵  $\mathbf{A}$  通常不是方阵,即使是方阵,也未必可逆,寻求方程(2)最小二乘意义下的解:

$$\min \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 \quad (3)$$

等价于解方程组:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (4)$$

方程组(4)的解通常不是唯一的,需要根据一定的准则,把物理上存在的唯一解找到。按照 Tikhonov<sup>[9]</sup> 正则化理论,对问题(3)提法的适当修正可以得到唯一和稳定的解。定义被重建的密度分布为如下优化问题的解:

$$\min \{ \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 + \alpha R(x) \} \quad (5)$$

式中,第 1 项  $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2$  描述重建图像对原始数据的逼近程度,第 2 项为正则化项,也称为稳定化泛函,保证了重新定义后问题解的稳定性。 $R(x)$  的适当选取,才能保证问题(式(5))的解满足物理与数学上的要求。事实上,  $R(x)$  的选取和优化问题(式(5))的数值求解是图像重建这一反问题的关键。 $\alpha$  称为正则化参数,对任何  $\alpha > 0$ , 式(5)是一个适定的问题,从逼近的角度看,参数  $\alpha$  不能取得太大,否则,辅助问题将与原问题相差太远。然而,从数值稳定性的角度来考虑,参数  $\alpha$  不能取得太小,否则,将把原问题的不稳定性“继承”得太多而难于处理。因此,  $\alpha$  是近似解对原始数据的逼近程度与稳定性之间的一个权衡。

正则化项  $R(x)$  的选取通常根据物体的先验信息确定。对于具有分段光滑密度分布的物体,取

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2, \text{ 可以得到对物体边界信息和内部密度值较理想的重建,同时对测量数据的噪}$$

声有抑制作用。记

$$F(x) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2$$

则多元函数优化问题

$$\min \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \right\} \quad (6)$$

的解可通过令  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  得到,即求解下列线性代数方程组:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (7)$$

式中,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (8)$$

对固定的  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}$  是对称正定的,采用 Cholesky 分解,求解方程组(7),可得图像重建问题的数值解。

## 4 仿真数据密度重建结果

首先对具有球对称分布的密度函数  $\rho(r)$  进行重建。定义

$$\rho(r) = \begin{cases} 0.001293 & r \leq 0.44 \\ 18.25 & 0.44 < r \leq 2.41 \\ 1.77 & 2.41 < r \leq 2.83 \\ 2.64 & 2.83 < r \leq 3.46 \\ 0 & r > 3.46 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。按图 1 所示的投影方式,将具有密度分布  $\rho(r)$  的物体投影到测量平面上,测量数据通常为离散的矩阵形式  $\tilde{\mathbf{B}}_{m \times m}$ , 根据测量数据,将物体分层重建。设过物体中心点一层的面密度数据为  $\tilde{\mathbf{b}}_{m \times 1}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_{m \times 1}$  应由物体的投影  $\mathbf{b}_{m \times 1}$  和噪声两部分组成,即

$$\tilde{\mathbf{b}}_{m \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1} + \delta \text{rand}(n) \quad (10)$$

式中,  $\delta$  代表噪声强度,  $\text{rand}(n)$  产生与  $\mathbf{b}_{m \times 1}$  同阶的随机矩阵,随机数大小在 0 与 1 之间。为了显示重建的精度,取过物体中心点一层的密度重建结果在图 2 中加以分析,其他层类似。图 2(a) 为密度分布的准确解;图 2(b) 为已知的含有噪声的面密度,噪

声强度  $\delta = 1.0$  ;图 2(c) 为不使用正则化方法,直接按最小二乘问题求解方程组(4)的数值结果,显然,所得到的数值解与准确解相距甚远;图 2(d)为使用正则化方法后,根据面密度数据  $\tilde{\mathbf{b}}_{m \times 1}$ ,按式(7)进行的密度重建,可以看出,数值解(圆点)没有因为原始数据的噪声而严重偏离准确解(实线),而是准确解的近似。图 2(e)验证了数值解随噪声强度的

变化。在图 2(e)中,初始数据的噪声强度取为  $\delta = 0.1$ ,和图 2(d)的数值结果相比,可以看到,随着噪声强度的降低,即测量数据的误差越小,近似解越逼近准确解。图中虚线(圆点组成)为数值解,实线为准确解。重建图像的光滑程度还与正则化参数的选取有关,图 2(d)和图 2(e),取了相同的正则化参数  $\alpha = 0.1$ 。

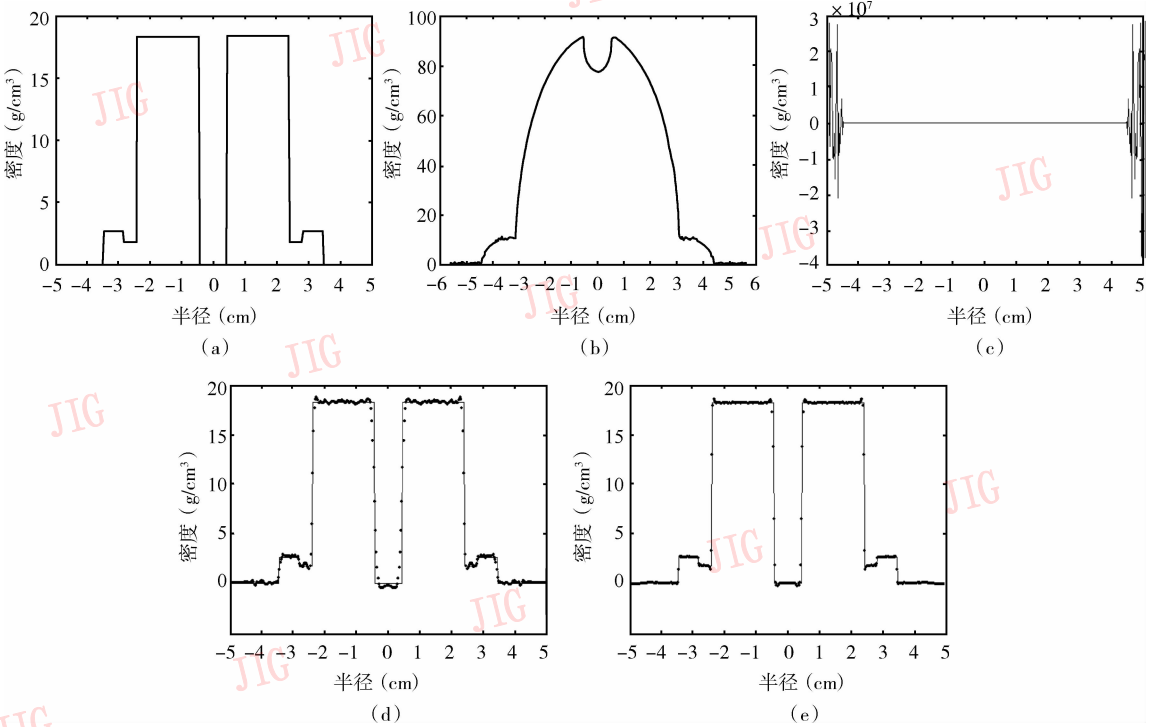


图 2 密度重建结果分析

Fig. 2 Analysis of density reconstruction

在图 3 中,给出了 4 个轴对称物体的密度重建图像。图 3(a)的密度分布函数如式(9)所定义;图 3(b)的密度分布函数定义为

$$\rho(r, z) = \begin{cases} 0.00129 & (r, z) \in C_1 \\ 18.25 & (r, z) \in C_2 - C_1 \\ 1.77 & (r, z) \in C_3 - C_2 \\ 2.64 & (r, z) \in C_4 - C_3 \\ 0 & (r, z) \notin C_4 \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$C_1 = \left\{ (r, z) : \frac{r^2}{0.5^2} + \frac{z^2}{1.0^2} \leq 1 \right\}$$

$$C_2 = \left\{ (r, z) : \frac{r^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1 \right\}$$

$$C_3 = \left\{ (r, z) : \frac{r^2}{2.3^2} + \frac{z^2}{3.3^2} \leq 1 \right\}$$

$$C_4 = \left\{ (r, z) : \frac{r^2}{2.8^2} + \frac{z^2}{3.8^2} \leq 1 \right\}$$

图 3(c)的密度分布函数定义为

$$\rho(r, z) = \begin{cases} 2.0 & (r, z) \in C_1 \\ 18.0 & (r, z) \in C_2 - C_1 \\ 0 & (r, z) \notin C_2 \end{cases} \quad (12)$$

式中,

$$C_1 = \{ (r, z) : 1.5 \leq r \leq 2.5, -1.5 \leq z \leq -0.5 \}$$

$$C_2 = \{ (r, z) : r^2 + z^2 \leq 4.0^2 \}$$

图 3(d)的密度分布函数定义为

$$\rho(r, z) = \begin{cases} 32.0 & (r, z) \in C_1 \\ 18.0 & (r, z) \in C_2 - C_1 \\ 0 & (r, z) \notin C_2 \end{cases} \quad (13)$$

式中,

$$C_1 = \{(r, z) : 0 \leq r \leq 0.5, -0.5 \leq z \leq 1.0\}$$

$$C_2 = \{(r, z) : r^2 + z^2 \leq 3.0^2\}$$

图 3 中的每一个子图表示过物体对称轴的密度分布剖面图,是分层重建的结果。对称轴的位置在  $r = 0$  处,图中颜色变化代表密度值的变化,值的大

小由每个子图右边的颜色条标示。在密度重建时,使用了含有噪声强度  $\delta = 1.0$  的面密度数据,噪声的定义如式(10)所示。从图 3 的重建结果看,轴对称物体的密度分布值和界面位置得到较准确重建,测量数据的噪声得到控制。

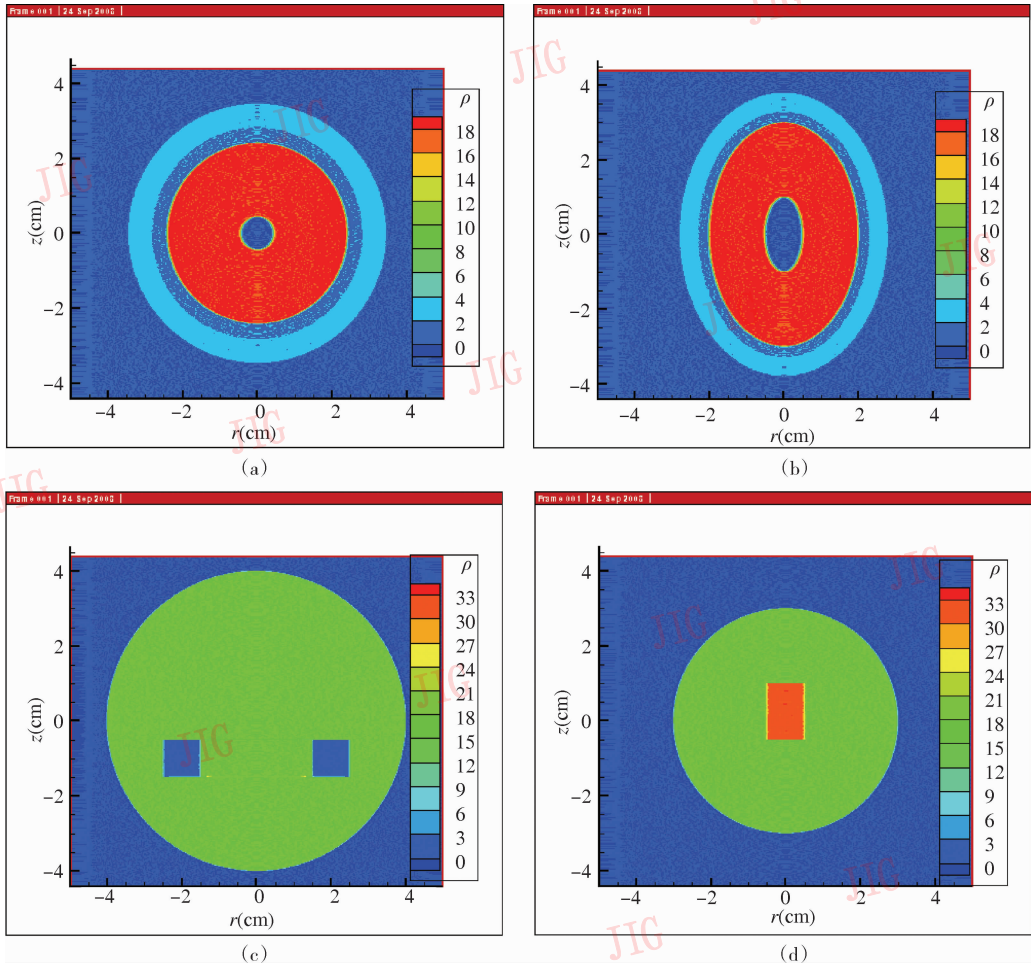


图 3 轴对称物体的密度重建图像

Fig. 3 Image of density reconstruction of axially symmetric object

### 5 结 论

针对点光源形成的锥形 X 光照射轴对称物体产生单幅平面投影数据的物理模型,论述了密度重建的数值求解方法。仿真数值结果验证了这一方法的可行性和有效性。通过图 3 给出了不同形状轴对称物体的整体重建效果;通过图 2 说明了分层重建的密度精度。密度重建问题属于反问题,反问题的不适定性是求解的困难所在,正则化处理是解决这一困难的有效途径,正则化项的选取是关键。根据

实际问题的需要,确定了正则化项的形式,建立了数学模型,仿真计算结果表明,此数值方法能够较准确地重建物体密度分布,具有抗噪性,保证了测量数据的微小误差不会使得数值解严重偏离真解。根据重建信息的不同特征,正则化项选取也不同,所产生的优化问题求解方法和难易程度也不一样,这也是值得进一步探讨的问题。

### 参考文献 (References)

1 Gordon R, Bender R, Herman G T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-

- ray photography [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1970, **29** (3): 471 ~ 481.
- 2 Asaki T J, Chartrand R, Vixie K R, *et al.* Abel inversion using total variation regularization: applications [R], LA-UR-05-2657, USA: Los Alamos National Laboratory, 2005.
  - 3 Asaki T J, Chartrand R, Vixie K R, *et al.* Abel inversion using total variation regularization [J]. *Inverse Problems*, 2005, (21): 1895 ~ 1903.
  - 4 Hanson K M, Cunningham G M, Jennings G R. Tomographic reconstruction based on flexible geometric models [A]. In: *Proceedings of 1994 International Conference on Image Processing [C]*, Austin, Texas, USA, 1994, **2**: 145 ~ 147.
  - 5 Hanson K M. A bayesian approach to nonlinear inversion: abel inversion from X-ray attenuation data [A]. *Transport Theory, Invariant Imbedding, and Integral Equations [M]*, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, edited by Nelson P, *et al.*, New York: Dekker Press, 1989: 363 ~ 378.
  - 6 Hanson K M. Special topics in test methodology: tomographic reconstruction of axially symmetric objects from a single dynamic radiograph [R]. LA-UR-87-1670, USA: Los Alamos National Laboratory, 1993.
  - 7 Hanson K M. Tomographic reconstruction of axially symmetric objects from a single radiograph [A]. In: *Proceedings of 16th International Conference on High Speed Photography and Photonics [C]*, Strasbourg, France, 1984, **491**: 180 ~ 187.
  - 8 Bresler Y, Fessler J A, Macovski A. A bayesian approach to reconstruction from incomplete projections of a multiple object 3D domain [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(8): 840 ~ 858.
  - 9 Tikhonov A N, Arsenin V Y. *Solutions of ill-posed problems [M]*. Washington DC, USA: Winston & Sons Press, 1977.